



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

31. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Blatt 12: zweite Probeklausur

Aufgabe 1: Sei $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale (Tipp: Polarkoordinaten!):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_U (1 - x^2 - y^2) \, d(x, y) \\ \text{(b)} \quad & \int_U 2xy e^{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \, d(x, y) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ eine stetig differenzierbare 1-Form. Seien $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\tilde{a} < \tilde{b}$, und $h : [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ stetig differenzierbar mit $h(a) = \tilde{a}$ und $h(b) = \tilde{b}$. Sei $\sigma : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Zeigen Sie:

$$\int_{\sigma} \omega \, dx = \int_{\sigma \circ h} \omega \, dx$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion oder beweisen Sie, dass es keine gibt:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x^2 y \, dx + x \, dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2) \\ \text{(b)} \quad & \frac{1}{1 + e^{y-x}} \, dx + \frac{1}{1 + e^{x-y}} \, dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Betrachte die 1-Form $\omega = y \, dx : \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$.

(a) Finden Sie eine geschlossene Kurve γ , so dass gilt:

$$\int_{\gamma} \omega \neq 0$$

(b) Finden Sie ein stetiges $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die 1-Form $\omega + f \, dy$ eine Stammfunktion hat.

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 31. Januar 2011 im Übungskasten.



Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zur zweiten Probeklausur (Blatt 12)

Aufgabe 1: In beiden Fällen sind beschränkte stetige Funktionen auf offenen Mengen gegeben; diese sind also integrierbar:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_U (1 - x^2 - y^2) \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - s^2) \cdot s \, ds \, dt = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (s - s^3) \, ds \, dt \\ &= 2\pi \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4} \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \int_U 2xy e^{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2s^2 \cos t \sin t e^{\frac{s^2(\sin t)^2}{s^2}} s \, ds \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{s^4}{4} \Big|_0^1 \cdot 2 \cos t \sin t e^{(\sin t)^2} \, dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 2 \cos t \sin t e^{(\sin t)^2} \, dt = \frac{1}{4} e^{(\sin t)^2} \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Wir wenden die Substitutionsregel mit $t = h(s)$ an, sowie die Kettenregel für $\sigma \circ h$:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \omega &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \omega(\sigma(t)) \sigma'(t) \, dt = \int_a^b \omega(\sigma(h(s))) \sigma'(h(s)) h'(s) \, ds \\ &= \int_a^b \omega(\sigma \circ h(s)) (\sigma \circ h)'(s) \, ds = \int_{\sigma \circ h} \omega \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (a) Es gibt keine Stammfunktion, da die 1-Form nicht geschlossen ist:

$$\frac{d}{dy}(x^2 y) = x^2 \neq 1 = \frac{d}{dx} x$$

(b) Diese 1-Form ist geschlossen:

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{1 + e^{y-x}} = - \frac{e^{y-x}}{(1 + e^{y-x})^2} = - \frac{e^{x-y} \cdot (e^{y-x})^2}{(1 + e^{x-y})^2 \cdot (e^{y-x})^2} = - \frac{e^{x-y}}{(1 + e^{x-y})^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1 + e^{x-y}};$$

also hat sie eine Stammfunktion. Wir berechnen diejenige Stammfunktion F mit $F(0, 0) = 0$ durch Integration entlang der Strecke $\gamma_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_{x,y}(t) = (xt, yt)$ von $(0, 0)$ nach (x, y) :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{\gamma_{x,y}} \left(\frac{1}{1 + e^{v-u}} du + \frac{1}{1 + e^{u-v}} dv \right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + e^{(y-x)t}} x + \frac{1}{1 + e^{(x-y)t}} y \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{xe^{xt} + ye^{yt}}{e^{xt} + e^{yt}} dt = \ln(e^{xt} + e^{yt}) \Big|_0^1 = \ln(e^x + e^y) - \ln 2 = \ln \frac{e^x + e^y}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (a) Setze etwa $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \sin t (-\sin t) dt = - \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 dt < 0$$

Das Integral über $(\sin t)^2$ ist positiv, da $(\sin t)^2 \geq 0$, aber nicht konstant null ist.

(b) Setze etwa $f(x, y) = y$. Dann ist xy eine Stammfunktion, denn:

$$d(xy) = y dx + x dy$$